

文章编号: 1000-7598-(2003) 05-0849-05

低频循环荷载下地基一维固结性状分析

关山海, 谢康和, 胡安峰

(浙江大学 岩土工程研究所, 浙江 杭州 310027)

摘要: 给出了低频梯形循环荷载下单层地基一维固结解。对该循环荷载下地基固结特性、相应的影响因素以及平均固结度、有效应力随荷载的发展和变化规律进行了分析和讨论, 并研究了有效应力最大和最小值随荷载的变化规律。在任一周期中, 有效应力 σ' 的发展并不与荷载的变化同步, 而是按一定规律滞后发展。

关键词: 低频循环荷载; 一维固结; 解析解; 压缩; 回弹

中图分类号: TU 433 **文献标识码:** A

Analysis of one-dimensional consolidation behavior of soils under low-frequency cyclic loading

GUAN Shan-hai, XIE Kang-he, HU An-feng

(Institute of Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: An analytical solution to one-dimensional consolidation problem under low-frequency trapezoidal cyclic loading is presented. Based on the solution, the consolidation behavior under the cyclic loading and its influential factors are investigated; and the variation rules of the average consolidation degree and the effective stress with the loading are discussed. Moreover, the principle of variation of the maximum and minimum value of effective stress in soil with the loading is analyzed. It is shown that the development of effective stress is not synchronously with the variation of loading but is in a delayed way.

Key words: low-frequency cyclic loading; one-dimensional consolidation; analytical solution; compression; rebounding

1 前言

循环荷载根据其作用频率, 可以分为高频、中频和低频三类。Zienkewicz 曾提出判别这三类荷载的准则^[1]。对于高频循环荷载下的固结问题, 须同时考虑土整体的运动惯性力和孔隙水相对于土骨架运动的惯性力; 而对于低频循环荷载下的固结问题, 该两项惯性力均可忽略不计, 即可按静力固结问题考虑。在实际工程中, 常见的低频循环荷载有: 海上风浪荷载^[2]; 地下水位周期性变化引起的循环荷载; 储油罐油面变化以及粮仓粮面变化等引起的循环荷载。

文献[3]基于太沙基一维固结方程, 首先, 给出了简单形式的在低频循环荷载作用下饱和土体的一维固结理论解。其后, 不少学者对形式更复杂的低

频循环荷载下地基的一维固结问题进行了研究, 并给出了相应解^[4~8]。但实际上, 在循环荷载作用下, 地基中土体不断地经历着加载和卸载过程, 土性将伴随着土体压缩性的变化而发生硬化。而上述低频循环荷载下地基一维固结解, 均未考虑土体压缩性在循环荷载下的变化。本文在现有基础上, 对低频循环荷载下地基的一维固结理论及固结性状进行了研究分析, 并由此探讨了获得考虑土体压缩性变化的固结解的可能性。

2 梯形循环荷载下单层地基一维固结解

图1中所示的荷载可模拟储油罐油面变化等引起的低频循环荷载, 在此研究该梯形循环荷载下地基的一维固结问题。图中: H , c_v 分别为地基厚度和固结系数; q_c 为循环周期中的最大荷载; βt_0

收稿日期: 2002-05-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No. 50079026)

作者简介: 关山海, 男, 1977年生, 硕士, 主要从事岩土力学领域的科研工作。

为一个循环加载周期的时间; α , β 分别为梯形循环荷载的加载系数。当 $\alpha = 0.5$ 时, 为三角形循环荷载; 当 $\alpha = 0$, 为矩形循环荷载; 当 $\alpha = 0$, $\beta = 1$ 时, 即转化为恒荷的情况。

除荷载外, 作与太沙基一维固结理论相同的假定, 可得到与图 1 相应的固结微分方程:

$$c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - f(t) \quad (1)$$

方程求解条件为

$$(1) \quad u|_{z=0} = 0 \quad (t > 0); \quad (2) \quad u|_{t=0} = 0;$$

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0, \quad (\text{底面不透水});$$

$$u|_{z=H} = 0, \quad (\text{底面透水})$$

式中 u 为超静孔隙水压力; $f(t) = dq/dt$, 为加荷速率。

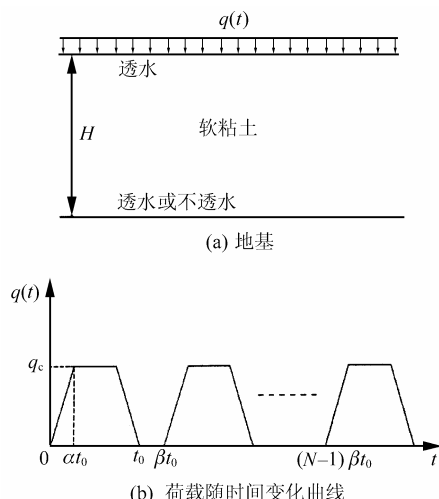


图 1 梯形循环荷载下地基一维固结示意
Fig.1 Sketch of 1-D consolidation of soft clay under trapezoidal cyclic loading

为了表达的方便, 根据梯形循环荷载的特点, 作如下定义: $t = (N-1)\beta t_0 + t'$, 其中, $N = 1, 2, 3, \dots$, $0 \leq t' \leq \beta t_0$ 。先考虑单面排水的情况。通过拉氏变换、逆变换及其时移性质, 可得梯形循环荷载作用下单层地基一维固结的相应解:

当 $(N-1)\beta t_0 \leq t \leq (N-1)\beta t_0 + \alpha t_0$,

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2q_c}{\alpha M^3 T_0} \sin\left(\frac{Mz}{H}\right) \left(1 - B_N e^{-M^2 T'}\right) \quad (2)$$

当 $(N-1)\beta t_0 + \alpha t_0 \leq t \leq (N-1)\beta t_0 + (1-\alpha)t_0$,

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2q_c}{\alpha M^3 T_0} \sin\left(\frac{Mz}{H}\right) \left[\left(e^{\alpha M^2 T_0} - B_N \right) e^{-M^2 T'} \right] \quad (3)$$

当 $(N-1)\beta t_0 + (1-\alpha)t_0 \leq t \leq (N-1)\beta t_0 + t_0$,

$$u = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2q_c}{\alpha M^3 T_0} \sin\left(\frac{Mz}{H}\right) \left[1 - \left(e^{\alpha M^2 T_0} + e^{(1-\alpha)M^2 T_0} - B_N \right) e^{-M^2 T'} \right] \quad (4)$$

当 $(N-1)\beta t_0 + t_0 \leq t \leq N\beta t_0$

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2q_c}{\alpha M^3 T_0} \sin\left(\frac{Mz}{H}\right) \left[\left(e^{\alpha M^2 T_0} - e^{M^2 T_0} + e^{(1-\alpha)M^2 T_0} - B_N \right) e^{-M^2 T'} \right] \quad (5)$$

式中

$$B_N = 1 + \frac{\left(e^{\alpha M^2 T_0} - 1 \right) \left(e^{\alpha M^2 T_0} - e^{M^2 T_0} \right) \left(1 - e^{-(N-1)\beta M^2 T_0} \right)}{e^{\alpha M^2 T_0} \left(1 - e^{\beta M^2 T_0} \right)}$$

$$T_0 = \frac{c_v t_0}{H^2}; \quad T' = \frac{c_v t'}{H^2}; \quad M = \frac{\pi}{2} (2m-1), m = 1, 2, \dots \quad (6)$$

对于双面排水的情况, 只需用 $H/2$ 代替以上解中的 H 。由孔压可计算有效应力, 即 $\sigma' = q(t) - u$ 。地基平均固结度则可由下式计算:

$$U = \frac{q(t)}{q_c} - \frac{1}{Hq_c} \int_0^H u dz \quad (7)$$

可以证明, 通过适当变动荷载参数 α , β , T_0 , 以上解就可蜕化为文献[5]或[6]所给出的解。

3 受循环荷载作用的单层地基一维固结性状分析

根据土体的压缩、回弹和再压缩曲线可知, 当地基土处于循环荷载作用下, 随着荷载的变化, 其压缩性也在不断发生改变。由于压缩实验测定的是在各级压力作用下土样压缩稳定后的孔隙比变化, 因此, 实际上 $e-p$ 和 $e-\lg p$ 压缩曲线所反映的就是孔隙比 e 和有效应力 σ' 之间的关系。这说明, 只要知道有效应力的变化规律, 就可以判断土体所处的状态 (即是处于压缩状态还是回弹、再压缩状态), 从而确定土的压缩性变化规律。所以, 要分析土体在循环荷载作用下压缩性的变化规律及其影响, 就应先研究循环荷载下地基一维固结性状, 尤其是有效应力 σ' 相应于循环荷载的变化规律。

3.1 梯形循环荷载下不同参数对固结的影响

基于本文解, 通过 Fortran 编程计算, 就可以分析各种因素对固结度 U , 有效应力 σ' (或孔压 u) 的影响, 从而得到地基的固结性状规律。由解可知, 影响固结性状的因素包括: ①一次循环中从加荷开始到卸荷结束的历时 (由参数 t_0 或 $T_0 = c_v t_0 / H^2$ 表

征); ②加荷和卸荷速率(由参数 α 表征, $0 \leq \alpha \leq 0.5$; 值越小, 速率越大); ③一次循环的总历时(即循环周期, 由参数 β 表征, $\beta \geq 1$; 值越大, 循环周期越长)以及循环次数(或周数) N 。

通过大量计算, 可得梯形循环荷载下不同参数对固结的影响如图2~8所示(图中, $T = c_v t / H^2$)。

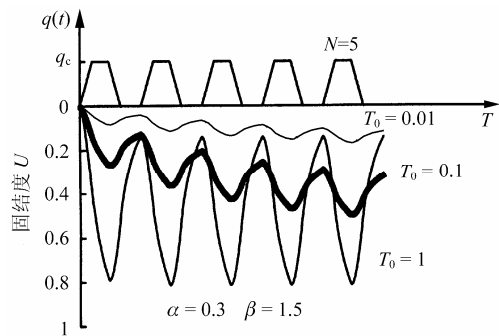


图2 T_0 对平均固结度 U 的影响

Fig.2 The influence of T_0 on average consolidation degree U

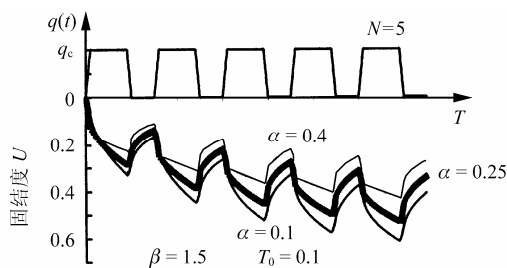


图3 α 对平均固结度 U 的影响

Fig.3 The influence of α on average consolidation degree U

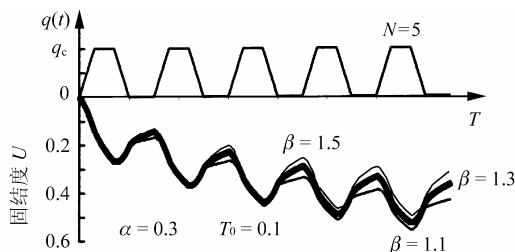


图4 β 对平均固结度 U 的影响

Fig.4 The influence of β on average consolidation degree U

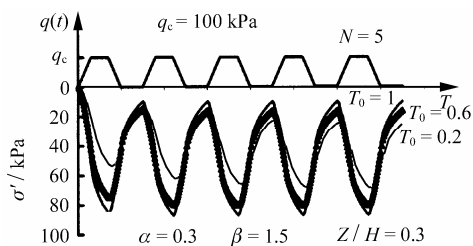


图5 T_0 对有效应力 σ' 的影响

Fig.5 The influence of T_0 on effective stress σ'

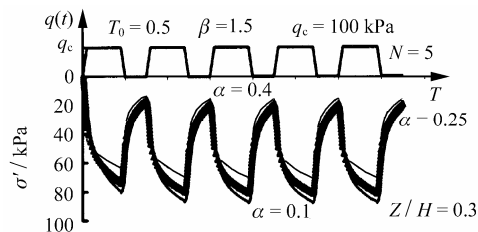


图6 α 对有效应力 σ' 的影响

Fig.6 The influence of α on effective stress σ'

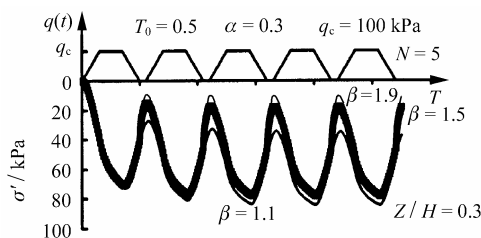


图7 β 对有效应力 σ' 的影响

Fig.7 The influence of β on effective stress σ'

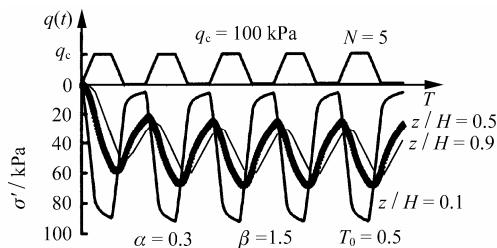


图8 不同深度处的有效应力 σ' 随时间变化曲线

Fig.8 The variation curves of effective stress σ' with time at different depth

从图中可见: (1) 荷载参数 α , β , T_0 的取值对平均固结度 U 和有效应力 σ' 均有一定的影响; (2) 在经过一定的循环周数后, 地基将达到一个比较稳定的状态, 即平均固结度 U 和有效应力 σ' 的峰值将随着循环周数 N 的增大趋于稳定, 且随着 T_0 的增大, 达到这种稳定状态所需的循环周数也将减少; (3) 在 β 和 T_0 取值一定的情况下, 加、卸荷速率越大(即 α 越小), 相应周期中的平均固结度越大, 而且, 每经过一个周期平均固结度的增加幅度也就越小; (4) 在 α 和 T_0 取值一定的情况下, β 越小, 地基达到稳定状态所需的循环周数也就越少; (5) 在 α , β , T_0 取值一定的情况下, 离排水面越近的土体, 其有效应力 σ' 达到稳定状态所需的循环周数也越少, 同时, σ' 在一个周期中的变化幅度也就越大。

由图中还可见, 每一个周期中有效应力峰值的出现与荷载转折点不同步, 而是有一定延迟。为

进一步研究有效应力随荷载的变化规律, 现对每个周期中卸荷开始以及下一个周期开始 (即 $T = [(N-1)\beta + (1-\alpha)]T_0$; $T = N\beta T_0$) 这两个荷载转折点进行相应的固结度和有效应力计算。

对于荷载转折点 $T = [(N-1)\beta + (1-\alpha)]T_0$, 可得

$$\left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{T=[(N-1)\beta+(1-\alpha)]T_0} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\alpha M^2 t_0} \left[\left(e^{\alpha M^2 T_0} - B_N \right) e^{-M^2 (1-\alpha) T_0} \right] \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial \sigma'}{\partial t} \right|_{T=[(N-1)\beta+(1-\alpha)]T_0} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2q_c}{\alpha M t_0} \sin\left(\frac{Mz}{H}\right) \left[\left(e^{\alpha M^2 T_0} - B_N \right) e^{-M^2 (1-\alpha) T_0} \right] \quad (9)$$

通过对式 (8), (9) 编程计算可知, 在荷载转折点 $T = [(N-1)\beta + (1-\alpha)]T_0$ 处, 平均固结度 U 没有达到一个周期中的最大值, 有效应力 σ' 同样也没有达到一个周期中的最大值。

对于荷载转折点 $T = N\beta T_0$, 可得

$$\left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{T=N\beta T_0} = \frac{1}{\alpha t_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{M^2} \left[\left(e^{\alpha M^2 T_0} - e^{M^2 T_0} + e^{(1-\alpha)M^2 T_0} - B_N \right) e^{-\beta M^2 T_0} \right] \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial \sigma'}{\partial t} \right|_{T=N\beta T_0} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2q_c}{\alpha M t_0} \sin\left(\frac{Mz}{H}\right) \cdot \left[\left(e^{\alpha M^2 T_0} - e^{M^2 T_0} + e^{(1-\alpha)M^2 T_0} - B_N \right) e^{-\beta M^2 T_0} \right] \quad (11)$$

通过对式 (10), (11) 编程计算可知, 在荷载转折点 $T = N\beta T_0$ 处, 平均固结度 U 仍未达到一个周期中的最小值。同样, 有效应力 σ' 也没有达到一个周期中的最小值。

通过对 $T = [(N-1)\beta + (1-\alpha)]T_0$; $T = N\beta T_0$ 这 2 个荷载转折点进行计算的结果可知, 不能简单地认为平均固结度 U 和有效应力 σ' 在这 2 个荷载转折点分别达到最大、小值。在 α 和 β 一定的情况下, U 和 σ' 在这两个转折点上的取值是随着 T_0 和 z/H 的取值而变化的。这也就是说, 与这 2 个荷载转折点相应的 U 和 σ' 值均非极值。

3.2 有效应力极值点的计算与分析

从压缩、回弹和再压缩的曲线可以看到, 要考虑循环荷载作用下土体压缩性变化对固结的影响, 其关键点, 就是要确定地基中土体在什么时候处于压缩阶段, 什么时候进入回弹阶段, 也就是要确定每一个循环周期中有效应力 σ' 的峰值点在何时

出现。可以通过 Fortran 编程对 σ' 的峰值点进行求解, 采用二分法来求方程 $\partial \sigma' / \partial t = 0$ 的根 (取求根步长为 10^{-3} , 精度为 10^{-6})。通过编程计算, 可得在 $(1-\alpha)T_0 \leq T' \leq \beta T_0$ 阶段 (即卸荷开始至本周期结束阶段) 中有效应力 σ' 的最大值 $\sigma'_{\max}$ 出现时间 t' 与 t_0 比值 (或即比值 T'/T_0), 并得到以下结论:

(1) 在每一个荷载作用周期中, $\sigma'_{\max}$ 出现在 $(1-\alpha)T_0 \leq T' \leq T_0$ 阶段中 (即卸荷阶段)。 α , β , T_0 和 z/H 的取值都将对 $\sigma'_{\max}$ 的出现点产生影响;

(2) 在 α , β 和 z/H 一定的情况下, T_0 越大, $\sigma'_{\max}$ 的出现点将越靠近 $T' = (1-\alpha)T_0$;

(3) 在 α , β 和 T_0 一定的情况下, z/H 越小, $\sigma'_{\max}$ 的出现点将越靠近 $T' = (1-\alpha)T_0$, 即离排水面越远的土体, 其有效应力达到 $\sigma'_{\max}$ 的时间点离卸荷开始点越远;

(4) 在 α , z/H 和 T_0 一定的情况下, β 越大, $\sigma'_{\max}$ 的出现点将越靠近 $T' = (1-\alpha)T_0$ 。但是, 相比之下 β 的影响较小;

(5) 在 β , z/H 和 T_0 一定的情况下, α 越大, $\sigma'_{\max}$ 的出现点将越靠近 $T' = (1-\alpha)T_0$;

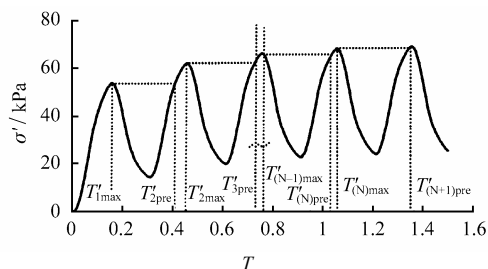
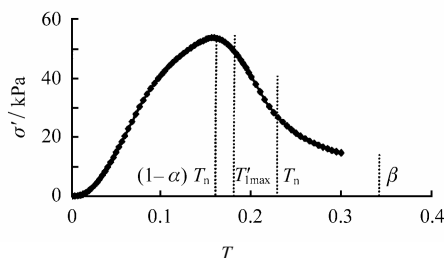
(6) 在 α , β , T_0 和 z/H 都确定的情况下, 随着循环次数 N 的增加, $\sigma'_{\max}$ 的出现点将逐渐远离 $T' = (1-\alpha)T_0$, 但是, 达到一定循环次数后, 将不再发生变化。

类似地, 可以研究 $\sigma'_{\min}$ 出现的时间。研究表明, 除第一个周期 (在该周期, $\sigma'_{\min} = 0$ 出现在 $T = 0$ 时) 外, $\sigma'_{\min}$ 均出现在加荷阶段内 (即 $0 \leq T' \leq \alpha T_0$); T_0 越大, α 越大, 离排水面越近, 土体中 $\sigma'_{\min}$ 出现的时间越接近加荷起始点 (即 $T' = 0$)。

3.3 关于考虑循环荷载下土体压缩性变化的地基固结分析的讨论

从前面的计算分析可知, 对于某一确定的梯形循环荷载来说, 也就是在 α , β 和 T_0 一定的情况下, $\sigma'_{\max}$ 的出现点将随着 z/H 的值而变化。例如, 当 $q_c = 100$ kPa, $\alpha = 0.3$, $\beta = 1.5$, $T_0 = 0.2$, 深度 $z = 0.3H$ 处的 σ' 随时间变化曲线将如图 9 所示。图中, $T'_{i\max}$ 为在第 i 个荷载循环周期中, $\sigma'_{\max}$ 所对应的 T' ; T'_{ipre} 为在第 i 个荷载循环周期中, 达到在第 $i-1$ 个荷载循环周期中的 $\sigma'_{\max}$ 值时所对应的 T' 。

从图 9 可知, 在梯形循环荷载作用下, 当 $T' \in [0, T'_{1\max}]$ 时, 地基处于压缩状态; 当 $T' \in [T'_{(i-1)\max}, T'_{ipre}]$ 时, 地基处于回弹和再压缩状态; 当 $T' \in [T'_{ipre}, T'_{i\max}]$ 时, 地基处于压缩状态; 当 $T' \in [T'_{i\max}, T'_{(i+1)pre}]$ 时, 地基处于回弹和再压缩状态。

图9 σ' 随时间变化曲线Fig.9 The variation curve of effective stress σ' with time图10 一个作用周期的梯形循环荷载下 σ' 的变化曲线Fig.10 Variation curve of effective stress σ' in one cycle of trapezoidal cyclic loading

因此,要在固结分析中考虑地基中各点土体压缩性的变化, T'_{imax} 和 T'_{ipre} 的确定就成了问题的关键。要求得解析解是有一定困难的。

为了探讨获得考虑土体压缩性变化的固结解的可能性,现仅对一个作用周期的梯形荷载下一维固结问题进行分析。对于只有一个作用周期的梯形荷载,其有效应力变化,如图10所示 ($q_c = 100$ kPa, $\alpha = 0.3$, $\beta = 1.5$, $z/H = 0.3$, $T_0 = 0.2$)。

从前面的计算分析可知,在 $0 \leq t \leq (1-\alpha)t_0$ 阶段,地基中任一点的 σ' 是递增的,即土体全部处于压缩状态,这时的解与梯形循环荷载下单层地基一维固结解是一致的。在 $(1-\alpha)t_0 \leq t \leq t_0$ 阶段,土体将逐渐进入回弹状态。由于越靠近地表的土体排水路径越短,其对外部荷载作用变化的反应也就越快,因此,地基中土体进入回弹状态是一个由上往下逐渐进入的过程,其分界面是随着时间变化的。要获得这一阶段正确的固结解,必须考虑地基中处于压缩状态的土层和处于回弹状态的土层分界面位置随时间的变化。

4 结 语

本文获得了不考虑土体压缩性变化的低频梯形循环荷载下地基一维固结问题的解析解,通过基于该解的计算分析表明:在任一周期中,有效应力 σ'

的发展并不与荷载的变化同步,而是按一定规律滞后发展。一般地,最大有效应力 σ'_{max} 发生在每一周期内的卸荷阶段,即 $(1-\alpha)T_0 \leq T'_{max} \leq T_0$; 最小有效应力 σ'_{min} 发生在每一周期内的加荷阶段,即 $0 \leq T'_{min} \leq \alpha T_0$; T'_{max} 和 T'_{min} 的具体值取决于参数 α , β , T_0 , N 及 z/H 。

由于有效应力的滞后发展,使得地基中一部分土体进入回弹状态,而另一部分则处于压缩状态,且两者的分界面位置随时间而变化。因此,在固结分析中考虑土体压缩性的变化(由于回弹、压缩状态的不断改变)十分必要。

参 考 文 献

- [1] Zienkiewicz O C, Bettess P. Soils and other saturated media under transient, dynamic conditions[J]. *Soil Mechanics—transient and cyclic loads*, 1982, 1—16.
- [2] 沈珠江. 理论土力学[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2000.
- [3] Wilson N E, Elgohary M M. Consolidation of soils under cyclic loading[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1974, 11(3): 420—423.
- [4] Baligh M M, Levadoux J N. Consolidation theory of cyclic loading[J]. *Journal of Geotechnical Engineering Division*, American Society of Civil Engineering 1978, 104(4): 415—431.
- [5] Favaretti M, Soranzo M. A simplified consolidation theory in cyclic loading conditions[J]. *Proceedings of International Symposium on Compression and Consolidation of Clayey Soils*. Japan, 1995, (1): 405—409.
- [6] Chen J Z, Zhu X R, Xie K H, Pan Q Y, Zeng G X. One dimensional consolidation of soft clay under trapezoidal cyclic loading[A]. *Proceedings of the Second International Conference on Soft Soil Engineering*[C], Nanjing:[s.n.], 1996, 211—216.
- [7] Xie K H, Guo S, Zeng G X. On the consolidation of the soft clay ground beneath large steel tank[J]. *Proceedings of International Conference on Advances in Steel Structures*. Hong Kong, 1996, 1 199—1 204.
- [8] Xie K H, Guo S, Li B H, Zeng G X. A theory of consolidation for soils exhibiting rheological characteristics under cyclic loading[J]. *Proceedings of International Conference On Computer Methods and Advances in Geomechanics*. Wuhan, 1997, 2: 1 053—1 058.